



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Jakość liniowych ciągłych układów
dynamicznych

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

23.01.2025



Plan prezentacji

Kryteria jakości regulacji

- Czasowe
- Całkowe

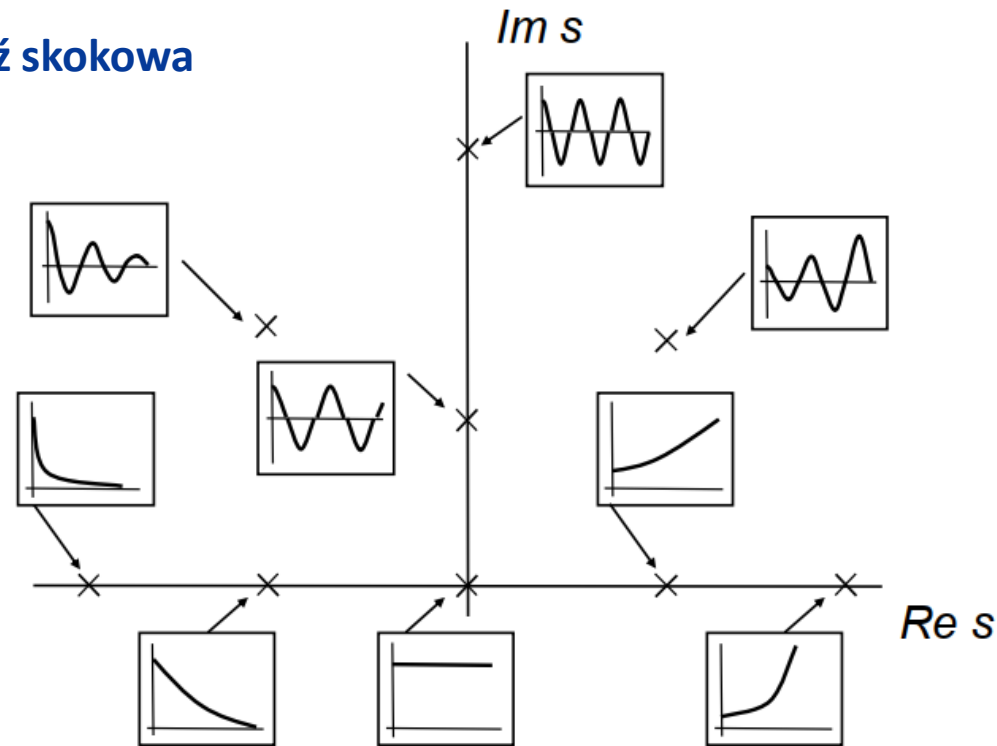
Kryteria jakości regulacji

Położenie pierwiastków a odpowiedź skokowa

Większa częstotliwość drgań (ω_n)



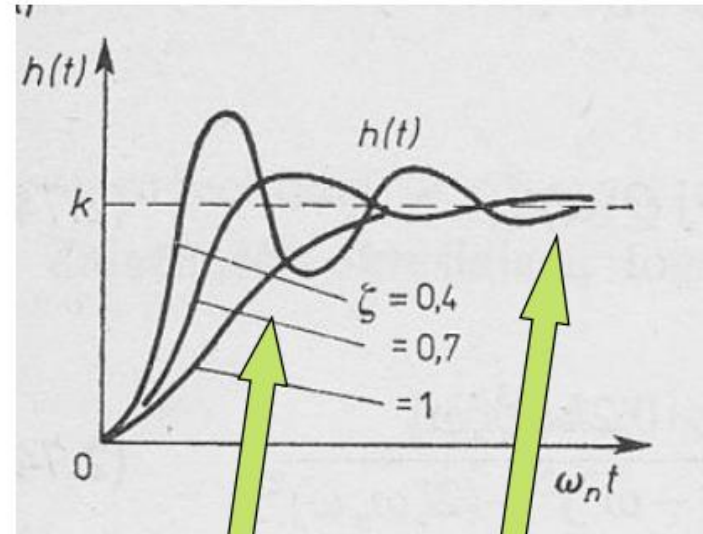
Większa szybkość zanikania (σ)



Czasowe kryteria jakości regulacji

Stan ustalony i stan nieustalony

- Czasowe kryteria jakości regulacji określają parametry lub właściwości przebiegów wielkości regulowanych w stanie nieustalonym
- Wykorzystują one najczęściej wymuszenie skokowe (charakterystyka skokowa)
- Pozwalają na ocenę:
 - Jak szybko osiągniemy stan ustalony – sygnał wyjściowy się ustabilizuje na stałej wartości
 - Jakie będą oscylacje w stanie nieustalonym



stan
nieustalony

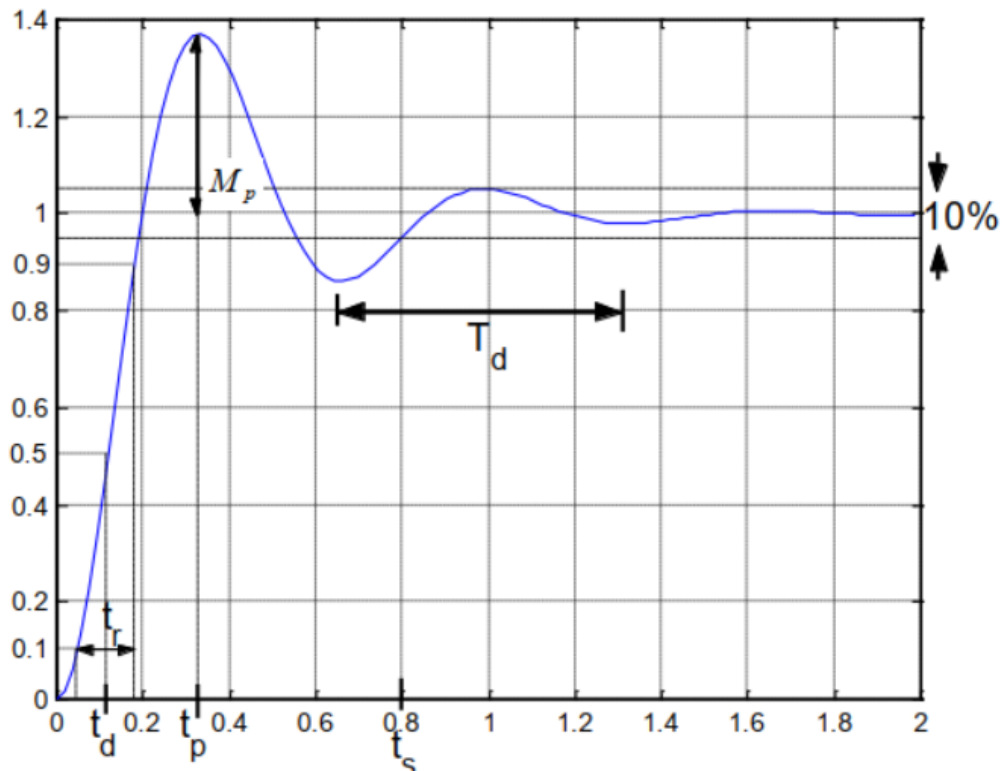
stan
ustalony



Czasowe kryteria jakości regulacji

Własność odpowiedzi skokowej

- t_p - czas piku (ang. *peak time*)
- t_r - czas narastania (ang. *rise time*)
- t_s - czas ustalania (ang. *settling time*)
- t_d - czas opóźnienia (ang. *delay time*)
- M_p - przeregulowanie (ang. *overshot*)
- T_d - okres oscylacji tłumionych





Czasowe kryteria jakości regulacji

Układ drugiego rzędu

- Transmitancja

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Parametry:

- współczynnik tłumienia (ζ)
- pulsacja drgań własnych nietłumionych (ω_n)

- Rodzaje układów (w zależności od parametrów):

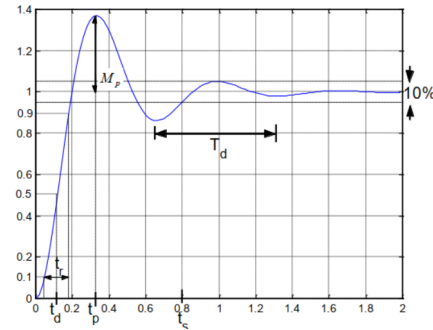
- bez tłumienia: $\zeta = 0$ (niegasnące oscylacje o pulsacji ω_n)
- słabo tłumione: $0 < \zeta < 1$ (tłumienie podkrytyczne; gasnące oscylacje o pulsacji ω_n)
- tłumienie krytyczne: $\zeta = 1$
- silne tłumienie (brak oscylacji) $\zeta > 1$



Czasowe kryteria jakości regulacji

Własność odpowiedzi skokowej

- t_p - czas piku (ang. *peak time*): $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
- t_r - czas narastania (ang. *rise time*): $t_r = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$
- t_s - czas ustalania (ang. *settling time*): $t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$
- M_p - przeregulowanie (ang. *overshot*): $M_p = 100\% \cdot e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ dla $0 \leq \zeta < 1$
- T_d - okres oscylacji tłumionych: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2t_p$



(dla $\zeta = 0.5$ czas narastania wynosi $t_r \cong \frac{1.7}{\omega_n}$)



Czasowe kryteria jakości regulacji

Przykład projektowy

- Założenie projektowe:

$$t_r \leq 0.6 \text{ s} \quad M_p \leq 10\% \quad t_s \leq 3 \text{ s}$$

- Używając wzoru na przeregulowanie, otrzymujemy:

$$100\% \cdot e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 10\% \quad \rightarrow \quad \zeta \geq 0.6$$

- Następnie wykorzystując zależności na czas narastania i czas ustalania otrzymujemy:

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad t_r = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} \cong \frac{2}{\omega_n} \quad (\text{dla } \zeta = 0.65)$$

Co prowadzi do zależności:

$$\zeta \omega_n \geq 1 \quad \omega_n \geq 3.33$$

Przykładowe rozwiązanie:

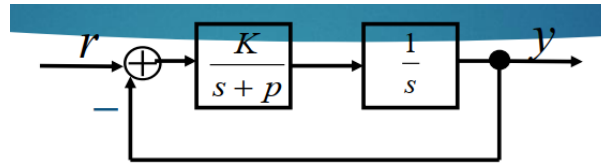
$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \omega_n = 4 \quad \rightarrow \quad p_{1/2} = -2\sqrt{2} \pm j4$$



Czasowe kryteria jakości regulacji

Przykład projektowy

Jeżeli w układzie ze sprzężeniem zwrotnym możemy wybrać wzmocnienie i biegun, jak w poniższym przykładzie:



Wówczas transmitancja układu zamkniętego ma postać:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Znając oczekiwane parametry $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\omega_n = 4$ możemy wyznaczyć nastawy układu regulacji:

$$K = \omega_n^2 = 16 \quad p = 2\zeta\omega_n = 4\sqrt{2}$$



Całkowe kryteria jakości regulacji

- Pozwalają na ocenę zarówno jakości w stanie ustalonym (dokładność statyczną) jak i nieustalonym (zapas stabilności i szybkość działania układu)
- Są to wyrażenie zawierające całki pewnych funkcji uchybu $e(t)$
- Są to miary ilościowe zachowania układu, które chcemy maksymalizować lub minimalizować. Zazwyczaj odzwierciedlają ważne cechy systemu



Całkowe kryteria jakości regulacji

Układ sterowania optymalnego

- Układ jest **układem sterowania optymalnego** wtedy gdy jego parametry są tak dobrane aby wartość wskaźnika jakości osiągnęła maksimum lub minimum (w zależności od zastosowania)
- Gdy poszukujemy minimum wskaźnika jakości, zwykle przyjmujemy jego postać tak aby przyjmował wartości tylko dodatnie



Całkowe kryteria jakości regulacji

Typowe wskaźniki jakości regulacji

- Jeżeli $e(t)$ jest składową przejściową uchybu regulacji w układzie to typowymi wskaźnikami jakości są (dla $T \rightarrow \infty$):

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt$$

- duże uchyby mają większą wagę

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt$$

- uchyby mniejsze od 1 mają większą wagę niż w ISE

$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt$$

- podkreśla wagę uchybu dla późniejszej chwili czasu t

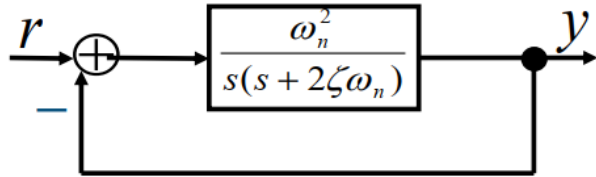
$$ITSE = \int_0^T t \cdot e^2(t) dt$$

- podobnie jak $ITAE$ ale większa waga dla dużych uchybów $e(t)$



Całkowe kryteria jakości regulacji

Typowe wskaźniki jakości regulacji - przykład



- Po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Minimum *ITAE* dla $\zeta = 0.7$

