UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

12.01.2025

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Plan prezentacji

Wprowadzenie

Modele zmiennych stanu i częstotliwościowe

Realizacja modeli

Relacje między modelami

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Sterowalność i obserwowalność

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Wprowadzenie

Układ dynamiczny

- **Układem** nazywamy trójkę (U, Y, F), gdzie U jest zbiorem wejść (wymuszeń), Y jest zbiorem wyjść (odpowiedzi), a F jest zbiorem odwzorowań (operacji, funkcji, transformacji określonych na zbiorze U i przyjmujących wartości w zbiorze Y

$$y = f(u), u \in U, y \in Y, f \in F$$

- W układzie **dynamicznym** odpowiedź układu w danej chwili czasowej t zależy nie tylko od wymuszenia w chwili t, and także od wcześniejszych wymuszeń i od warunków początkowych.

- W układzie **statycznym** $y(t)$ zależy wyłącznie od $u(t)$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Wprowadzenie

Liniowy układ ciągły

- **Liniowy** – U i Y są przestrzeniami liniowymi, a F jest zbiorem operacji liniowych (zasada superpozycji)
- **Ciągły** – sygnały mają charakter ciągły, czas jest zmienną rzeczywistą

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Wprowadzenie

Uwagi wstępne

- **Model** – uproszczona (umyślnie i celowo) reprezentacja rzeczywistości
- **Model matematyczny** – model w postaci relacji matematycznych i/lub logicznych
- Model liniowego układu dynamicznego tworzy się na podstawie posiadanych informacji o obiekcie będącym w zakresie zainteresowania projektanta
- Ilość oraz jakość (np. pomiary lub znajomość struktury wewnętrznej obiektu) posiadanych informacji o obiekcie determinuje w większości przypadków rodzaj modelu, który należy wybrać

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Uproszczona systematyka

Modele czasowe

- Model zmiennych stanu

dziedzina zmiennej rzeczywistej

Modele częstotliwościowe

- Transmitancja operatorowa
- Transmitancja widmowa

dziedzina zmiennej zespolonej

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Model zmiennych stanu

Stanem układu (procesu) nazywamy zbiór niezależnych wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$, jednoznacznie określający zachowanie układu

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Wynika stąd, że znając wartości wszystkich zmiennych stanu w danej chwili czasu możemy wyznaczyć wartości wszystkich innych sygnałów w układzie.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Równanie stanu

Równaniem stanu, modelu opartego na **zmiennych stanu** nazywamy następujące równanie <u>różniczkowe:</u>

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\,x\,m}$$

- $\boldsymbol{x}$ – wektor zmiennych stanu
- $\boldsymbol{u}$ – wektor sygnałów wymuszeń
- $\boldsymbol{A}$ – macierz stanu (macierz systemowa)
- $\boldsymbol{B}$ – macierz wejść
- n – rząd modelu
- m – liczba wejść

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Równanie stanu - przykład

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\ x\ 2}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\ x\ 1}$$

- $\boldsymbol{x}$ – wektor zmiennych stanu
- $\boldsymbol{u}$ – wektor sygnałów wymuszeń
- $\boldsymbol{A}$ – macierz stanu (macierz systemowa)
- $\boldsymbol{B}$ – macierz wejść
- n – rząd modelu
- m – liczba wejść

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Równanie wyjścia

Równaniem wyjścia, modelu opartego na **zmiennych stanu** nazywamy następujące równanie algebraiczne:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{p}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\,x\,n}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p\,x\,m}$$

- $\boldsymbol{x}$ – wektor zmiennych stanu
- $\boldsymbol{u}$ – wektor sygnałów wymuszeń
- $\boldsymbol{y}$ – wektor sygnałów wyjściowych
- $\boldsymbol{C}$ – macierz wyjść
- $\boldsymbol{D}$ – macierz przenoszenia
- n – rząd modelu
- m – liczba wejść

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Równanie wyjścia - przykład

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{D} = [0]$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{1\,x\,2}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^1$$

- $\boldsymbol{x}$ – wektor zmiennych stanu
- $\boldsymbol{u}$ – wektor sygnałów wymuszeń
- $\boldsymbol{y}$ – wektor sygnałów wyjściowych
- $\boldsymbol{A}$ – macierz stanu (macierz systemowa)
- $\boldsymbol{B}$ – macierz wejść
- n – rząd modelu
- m – liczba wejść

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Model zmiennych stanu c.d.

W dalszych rozważaniach na temat modelu zmiennych stanu będziemy model ten utożsamiać z następującym układem równań:

$$\begin{cases} \text{równanie stanu} \\ \text{równanie wyjścia} \end{cases} \quad \text{->} \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} \end{cases}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Model zmiennych stanu c.d. – przykład

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\,x\,2}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\,x\,1}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{1\,x\,2}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^1$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

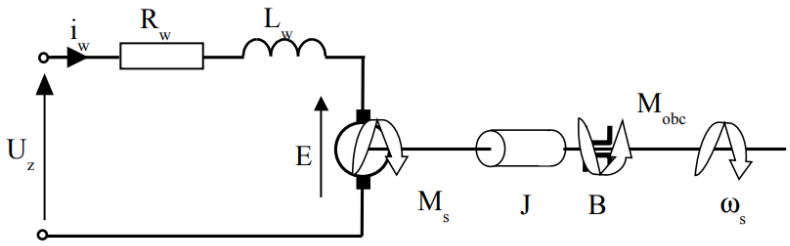
Wyznaczanie modelu zmiennych stanu

1. Wypisać równania wynikające z praw fizycznych funkcjonowania obiektu
2. Wybrać wielkości odgrywające role zmiennych stanu (najczęściej wielkości różniczkowane w otrzymanych równaniach)
3. Uporządkować otrzymane równania do postaci odpowiadającej modelowi zmiennych stanu (wyróżnić równanie stanu oraz równanie wyjścia)

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Wyznaczanie modelu zmiennych stanu - przykład



Rys. 6.2. Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika prądu stałego

Z II-go prawa Kirchhoffa:

$$U_z = R_w i_w(t) + L_w \frac{d}{dt} i_w(t) + k_e \omega_s(t)$$

Równanie równowagi mechanicznej:

$$k_e i_w(t) = J \frac{d\omega_s(t)}{dt} + B\omega_s(t) + M_{obc}$$

U_z - napięcie zasilania
R_w - rezystancja uzwojenia
L_w - indukcyjność uzwojenia
k_e - stała momentowa
i_w - prąd wirnika
ω_s - prędkość wału silnika
J – moment bezwładności
B – stała tarcia wiskotycznego
M_{obc} - moment obciążenia

Źródło: https://home.agh.edu.pl/~pautom/pliki/laboratoria/lab2_.pdf

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Wyznaczanie modelu zmiennych stanu – przykład c.d.

$$\begin{cases} U_z = R_w i_w(t) + L_w \frac{d}{dt} i_w(t) + k_e \omega_s(t) \\ k_e i_w(t) = J \frac{d\omega_s(t)}{dt} + B\omega_s(t) + M_{obc} \end{cases} \quad \text{->} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} i_w(t) = \frac{1}{L_w} U_z - \frac{R_w}{L_w} i_w(t) - \frac{k_e}{L_w} \omega_s(t) \\ \frac{d}{dt} \omega_s(t) = \frac{k_e}{J} i_w(t) - \frac{B}{J} \omega_s(t) - \frac{1}{J} M_{obc} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_w}{L_w} & -\frac{k_e}{L_w} \\ \frac{k_e}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_w} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_z(t) \\ M_{obc}(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix}$$

(przy założeniu, że wyjściem jest prąd silnika)

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Transmitancja operatorowa

Transmitancją operatorową $T(s)$ układu liniowego nazywamy funkcję zmiennej zespolonej określoną jako iloraz transformaty operatorowej sygnału wyjściowego $y(t)$ i transformaty operatorowej sygnału wejściowego $u(t)$ przy zerowych warunkach początkowych

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L\big(y(t)\big)}{L\big(u(t)\big)}$$

Transformata jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej s

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Transmitancja operatorowa

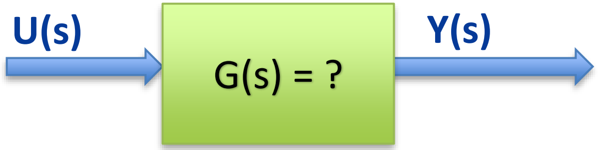
- Model liniowego układu dynamicznego w postaci transmitancji operatorowej nie wymaga wiedzy na temat sposobu funkcjonowania modelowanego obiektu

- Transmitancję operatorową danego układu liniowego może uzyskać bezpośrednio z modelu zmiennych stanu lub dzięki wykonanym pomiarom

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Wyznaczenie transmitancji operatorowej

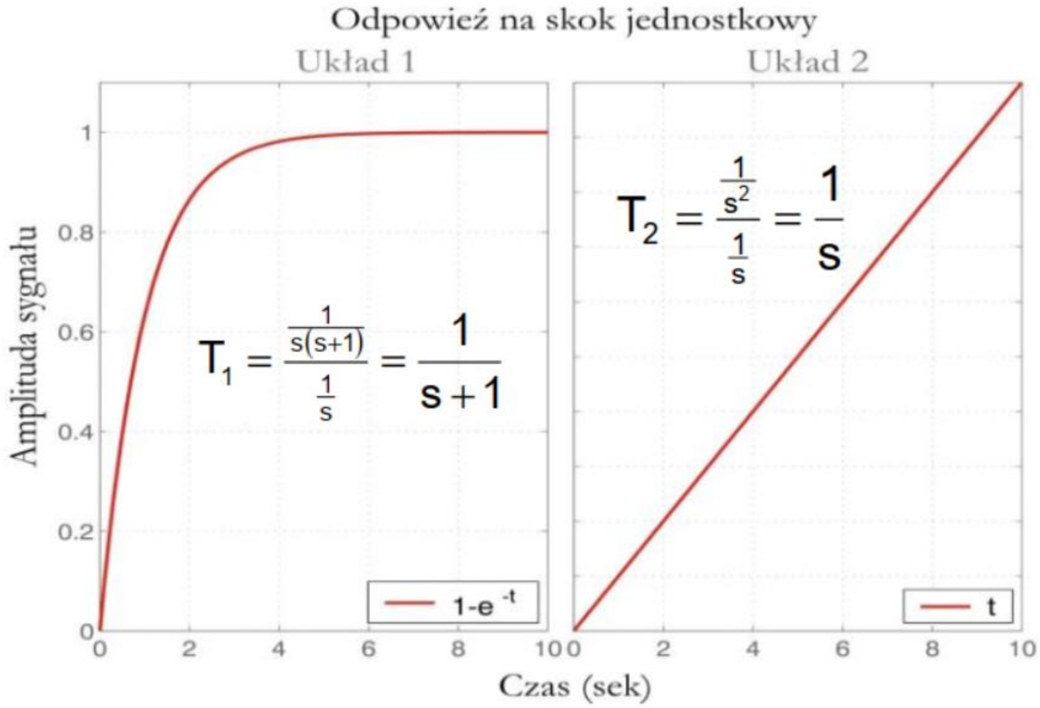


1. Upewnić się, że wewnątrz badanego układu nie jest zgromadzona energia
2. Zarejestrować sygnał wejściowy $u(t)$ (najczęściej skok jednostkowy) oraz sygnał wyjściowy $y(t)$
3. Wyznaczyć przekształcenia Laplace'a funkcji $u(t)$, $y(t)$
4. Podzielić transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego $y(t)$ przez transformatę Laplace'a sygnału wejściowego $u(t)$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Wyznaczenie transmitancji operatorowej - przykład



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Transmitancja widmowa

Transmitancją widmową $T(j\omega)$ układu liniowego nazywamy zespoloną funkcję zmiennej rzeczywistej ω określoną jako iloraz transformaty Fouriera sygnału wyjściowego $y(t)$ i transformaty Fouriera sygnału sinusoidalnego $u(t)$ o pulsacji ω <u>przy zerowych warunkach początkowych</u>

$$T(j\omega) = \frac{F\big(y(t)\big)}{F\big(u(t)\big)} = T(s)\Big|_{s=j\omega}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Transmitancja widmowa

- Transmitancja widmowa w dziedzinie częstotliwości jest analogiem transmitancji operatorowej w dziedzinie zmiennej zespolonej
- Transmitancja widmowa jest wielkością zespoloną, zależną od parametrów układu i pulsacji wymuszenia
- Transmitancja widmowa mówi jak są wzmacniane i przesuwane w fazie sygnały sinusoidalne o różnych pulsacjach

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Modele liniowych ciągłych układów dynamicznych

Transmitancja widmowa - przykład

$$z = a + bi = |z| \cdot \frac{a}{|z|} + |z| \cdot \frac{b}{|z|} i = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{dla } a > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, & \text{dla } a < 0 \text{ oraz } b \geqslant 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, & \text{dla } a < 0 \text{ oraz } b < 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b < 0 \\ \text{niezdefiniowane}, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b = 0 \end{cases}.$$

$$T(s) = \left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1 - j\omega}{\omega^2 + 1}$$

$$T(\omega) = \left.\frac{1 - j\omega}{\omega^2 + 1}\right|_{\omega=1} = \frac{1 - j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j$$

$$T(\omega = 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-45°) + j \sin(-45°)]$$

Wniosek: sygnał sinusoidalny o pulsacji $\omega = 1$ zostanie wzmocniony $\frac{\sqrt{2}}{2}$ razy i przesunięty w fazie o $-45°$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Problem realizacji modelu

- Problem realizacji polega na skonstruowaniu układu dynamicznego zgodnego z zadanym modelem (zmiennych stanu lub transmitancji operatorowej)

- Problem realizacji modelu zmiennych stanu polega na skonstruowaniu układu dynamicznego, który będzie funkcjonował według równań stanu i równania wyjścia

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \quad \text{-->}$$

- Problem realizacji modeli w postaci transmitancji operatorowej polega na skontruowaniu układu dynamicznego, który będzie realizować funkcję przenoszenia reprezentowaną przez daną transmitancję

$$T(s) = \frac{L(y(t))}{L(u(t))} \quad \text{-- >}$$

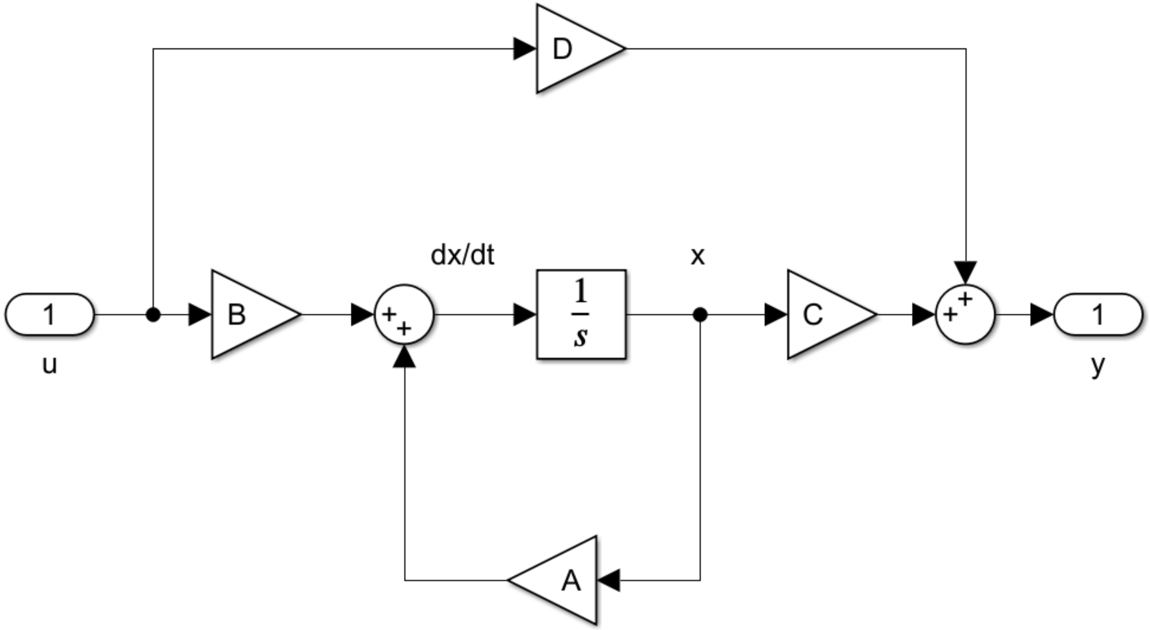
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja modelu zmiennych stanu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

-->



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja modelu zmiennych stanu - procedura

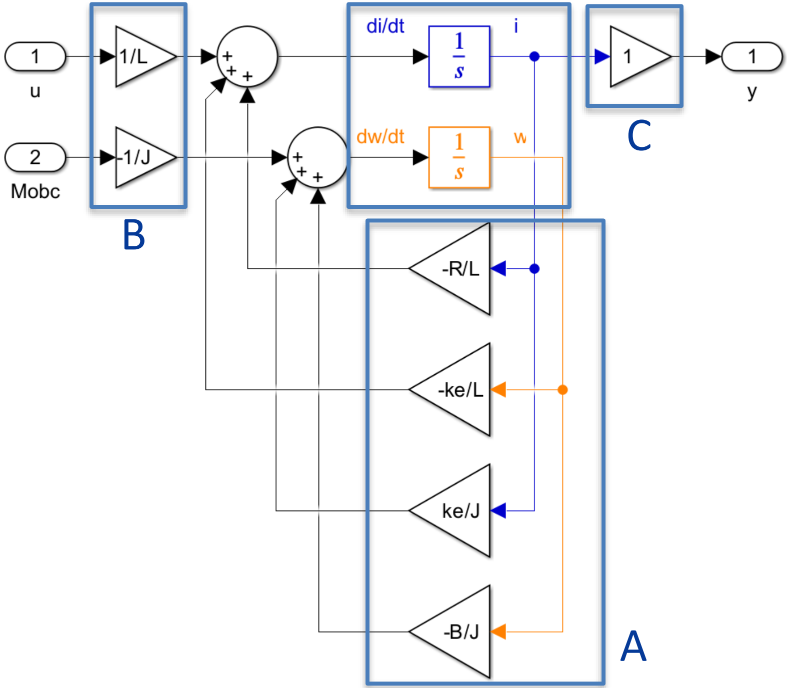
1. Umieścić na schemacie elementy całkujące dla każdej ze zmiennych stanu
2. Dla każdej zmiennych stanu wprowadzić węzeł sumujący, którego sygnał wyjściowy jest doprowadzony do wejścia elementu całkującego
3. Dla każdego węzła sumacyjnego (określającego wartość pochodnej odpowiedniej zmiennej stanu) doprowadzić sygnały wejściowe według struktury macierzy B
4. Dla każdego węzła sumacyjnego doprowadzić sygnały zmiennych stanu według macierzy A
5. Na podstawie równania wyjścia modelu (macierze C i D) skonstruować w postaci węzła sumacyjnego sygnał wyjściowy

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_w}{L_w} & -\frac{k_e}{L_w} \\ \frac{k_e}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_w} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_z(t) \\ M_{obc}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_w(t) \\ \omega_s(t) \end{bmatrix}$$

Realizacja modelu zmiennych stanu - procedura



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja transmitancji operatorowej

1. Licznik i mianownik danej transmitancji operatorowej podzielić przez s w największej potędze mianownika

$$T(s) = \frac{a_1 s^m + a_2 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n} = \frac{a_1 s^{m-n} + a_2 s^{m-n-1} + \cdots + a_{m-1} s^{-n+1} + a_m s^{-n}}{1 + b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-n+1} + b_n s^{-n}}$$

2. Rozbić otrzymaną transmitancję na następujący układ równań

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ --> } Y(s) = (a_1 s^{m-n} + a_2 s^{m-n-1} + \cdots + a_{m-1} s^{-n+1} + a_m s^{-n}) \frac{U(s)}{1+b_1 s^{-1}+\cdots+b_{n-1} s^{-n+1}+b_n s^{-n}}$$

$$\begin{cases} Y(s) = (a_1 s^{m-n} + a_2 s^{m-n-1} + \cdots + a_{m-1} s^{-n+1} + a_m s^{-n}) E(s) \\ E(s) = \dfrac{U(s)}{1 + b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-n+1} + b_n s^{-n}} \end{cases}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja transmitancji operatorowej

3. Przekształcić układ równań do następującej postaci

$$E(s) = \frac{U(s)}{1+b_1 s^{-1}+\cdots+b_{n-1}s^{-n+1}+b_n s^{-n}}$$

$$E(s)(1 + b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1}s^{-n+1} + b_n s^{-n}) = U(s)$$

$$E(s) + E(s)(b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1}s^{-n+1} + b_n s^{-n}) = U(s)$$

$$E(s) = U(s) - E(s)(b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1}s^{-n+1} + b_n s^{-n})$$

$$\begin{cases} Y(s) = (a_1 s^{m-n} + a_2 s^{m-n-1} + \cdots + a_{m-1}s^{-n+1} + a_m s^{-n})E(s) \\ E(s) = U(s) - (b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1}s^{-n+1} + b_n s^{-n})E(s) \end{cases}$$

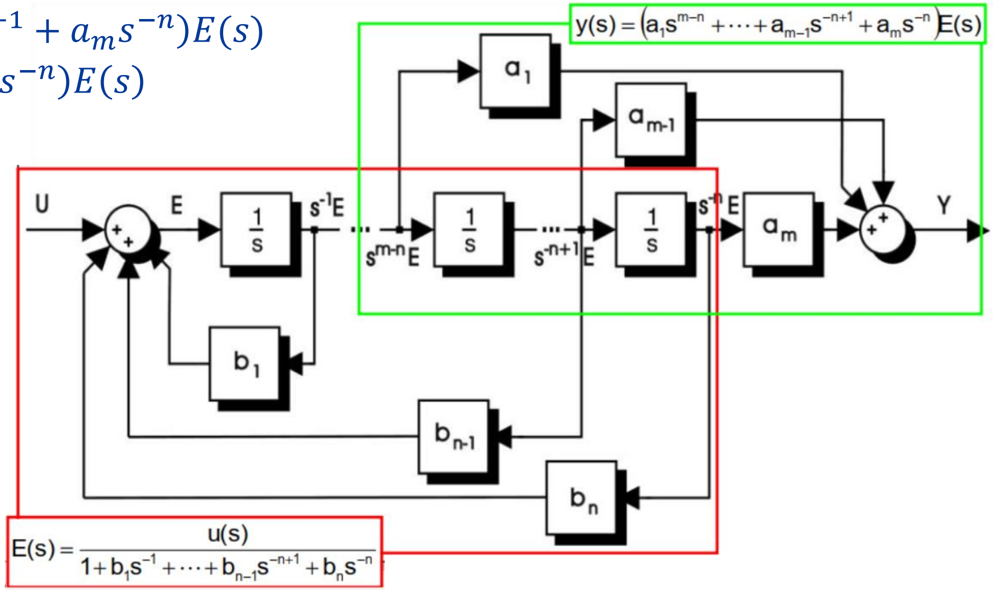
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja transmitancji operatorowej

4. Zrealizować układ równań za pomocą elementów całkujących i wzmacniaczy

$$\begin{cases} Y(s) = (a_1 s^{m-n} + a_2 s^{m-n-1} + \cdots + a_{m-1} s^{-n+1} + a_m s^{-n})E(s) \\ E(s) = U(s) - (b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-n+1} + b_n s^{-n})E(s) \end{cases}$$



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja transmitancji operatorowej - przykład

$$T(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 5s + 6} = \frac{2s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3}}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3}}{1 + s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3}}$$

$$Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3})\frac{U(s)}{1 + s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3}}$$

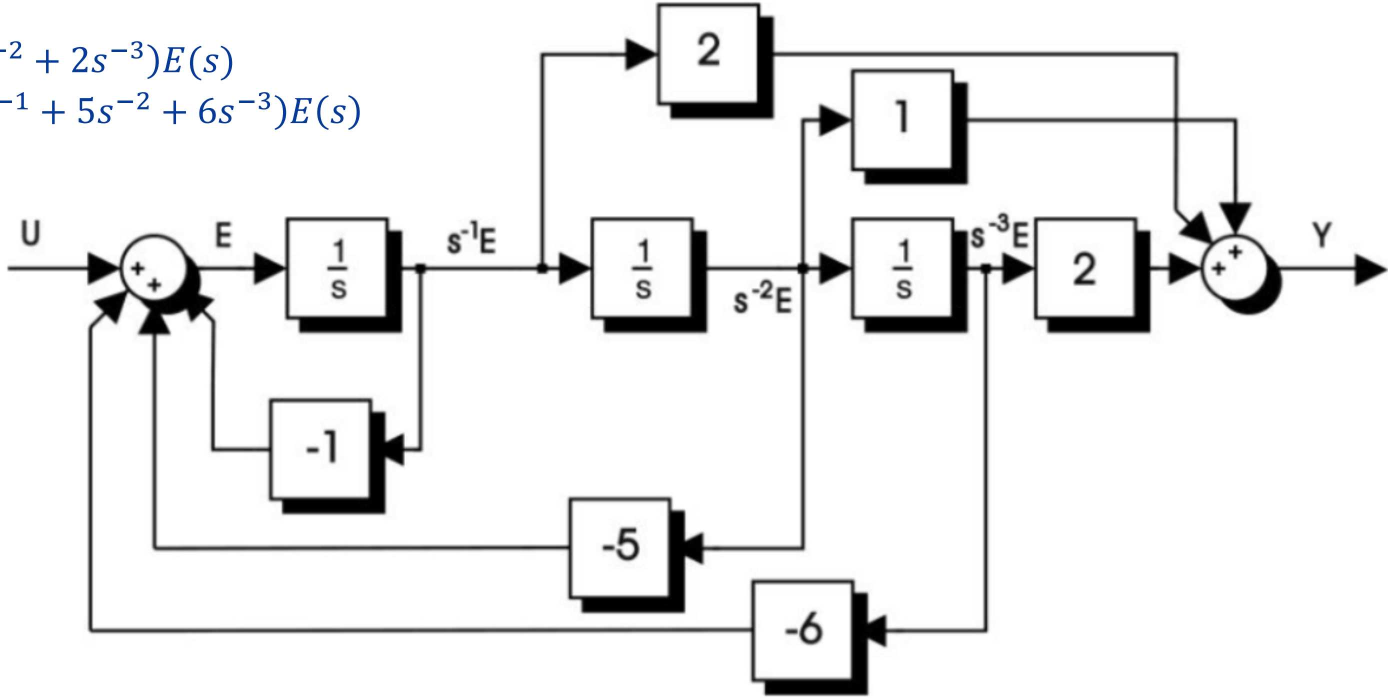
$$\begin{cases} Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3})E(s) \\ E(s) = U(s) - (s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3})E(s) \end{cases}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Realizacja modelu

Realizacja transmitancji operatorowej - przykład

$$\begin{cases} Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2s^{-3})E(s) \\ E(s) = U(s) - (s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3})E(s) \end{cases}$$



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Porównanie modeli

Model zmiennych stanu	Transmitancja operatorowa
$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases}$	$T(s) = \frac{L(y(t))}{L(u(t))}$
Model zmiennych stanu pozwala dowiedzieć się o procesach zachodzących wewnątrz obiektu	Model w postaci transmitancji operatorowej takich informacji nie dostarcza
Model zmiennych stanu dostarcza najwięcej informacji o modelowanym obiekcie	Transmitancja operatorowa dostarcza najmniej informacji o modelowanym obiekcie
Model zmiennych stanu pozwala na uzyskanie wszystkich informacji, które można uzyskać za pomocą transmitancji operatorowej	Nie każda informacja wydobyta z modelu zmiennych stanu może być wydobyta z modelu w postaci transmitancji operatorowej

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Porównanie modeli - wnioski

- Model zmiennych stanu jest lepszy ze względu na ilość dostarczanych informacji o modelowanym obiekcie niż model w postaci transmitancji operatorowej

- Model zmiennych stanu wymaga stosowania bardziej złożonego aparatu pojęciowego niż model w postaci transmitancji operatorowej

- Stworzenie modelu zmiennych stanu wymaga wiedzy na temat zjawisk fizycznych zachodzących wewnątrz modelowanego obiektu

- Model w postaci transmitancji operatorowej takiej wiedzy nie wymaga

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Relacje między modelami

- W jaki sposób z modelu zmiennych stanu otrzymać równoważny (w sensie relacji na sygnał wejściowy) model w postaci transmitancji operatorowej?

- W jaki sposób z transmitancji operatorowej wyznaczyć równoważny (w sensie reakcji na sygnał wejściowy) model stanu?

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Model zmiennych stanu -> transmitancja operatorowa

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)\\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + Du(t)\end{cases} \text{ -> Laplace -> } \begin{cases}s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}X(s) + \boldsymbol{B}U(s)\\ Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s)\end{cases}$$

zał. $\boldsymbol{x}(0) = 0$

$$\begin{cases}s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s)\\ Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s)\end{cases} \text{ -> } \begin{cases}s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)\\ Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s)\end{cases} \text{ -> } \begin{cases}(\boldsymbol{1}s - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)\\ Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(s) = (\boldsymbol{1}s - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)\\ Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s)\end{cases} \text{ -> } Y(s) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{1}s - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = \left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{1}s - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D\right]U(s) \text{ -> } T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{1}s - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Model zmiennych stanu -> transmitancja operatorowa

Transformacja modelu zmiennych stanu do transmitancji operatorowej jest przekształceniem jednoznaczym czyli danemu modelowi zmiennych stanu odpowiada **dokładnie jedna transmitancja operatorowa o postaci**:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(\mathbf{1}s - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B} + D$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Model zmiennych stanu -> transmitancja operatorowa - przykład

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$$T(s) = \boldsymbol{C}(\mathbf{1}s - \boldsymbol{A})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B} + D$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-s - 0.5}{s^2 + 3s + 2}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Transmitancja operatorowa -> model zmiennych stanu

Transmitancja modelu w postaci transmitancji operatorowej do modelu zmiennych stanu **nie jest** przekształceniem jednoznacznym, tzn. danej transmitancji operatorowej odpowiada nieskończenie wiele modeli zmiennych stanu.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Transmitancja operatorowa -> model zmiennych stanu

1. Daną transmitancję operatorową przekształcić do postaci układu równań przez wprowadzenie dodatkowego sygnału $E(s)$
2. Sygnał $E(s)$ oraz jego kolejne całki będą odgrywać rolę kolejnych składowych wektora zmiennych stanu

$$\begin{cases} L^{-1}[E(s)] = \dot{x}_n(t) \\ L^{-1}[s^{-1}E(s)] = x_n(t) \\ \dots \\ L^{-1}[s^{-n}E(s)] = x_1\,(t) \end{cases}$$

3. Po dokonaniu podstawienia otrzymany układ równań należy przekształcić do postaci macierzowej, która jest poszukiwanym modelem stanu

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Model zmiennych stanu -> transmitancja operatorowa - przykład

$$T(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 5s + 6} = \frac{2s^{-1} + s^{-2} + 2^{-3}}{1 + s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3}}$$

$$Y(s) = \frac{2s^{-1}+s^{-2}+2^{-3}}{1+s^{-1}+5s^{-2}+6s^{-3}}U(s) \quad \text{->} \quad \begin{cases} Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2^{-3})E(s) \\ E(s) = \frac{U(s)}{1+s^{-1}+5s^{-2}+6s^{-3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2^{-3})E(s) \\ E(s) = U(s) - (s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3})\,E(s) \end{cases}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Model zmiennych stanu -> transmitancja operatorowa - przykład

$$\begin{cases} Y(s) = (2s^{-1} + s^{-2} + 2^{-3})E(s) \\ E(s) = U(s) - (s^{-1} + 5s^{-2} + 6s^{-3})\,E(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^{-1}[E(s)] = \dot{x}_3(t) \\ L^{-1}[s^{-1}E(s)] = x_3(t) \\ L^{-1}[s^{-2}E(s)] = x_2(t) \\ L^{-1}[s^{-3}E(s)] = x_1(t) \end{cases} \text{->} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(t) - (x_3(t) + 5x_2(t) + 6x_1(t)) \\ y = 2x_3(t) + x_2(t) + x_1(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Relacje między modelami

Transmitancja operatorowa -> model zmiennych stanu

- Dlaczego jednej transmitancji operatorowej może odpowiadać dowolnie wiele modeli zmiennych stanu?
- Odpowiedź: Przed przekształceniem transmitancji do układu równań poprzez wprowadzenie sygnału $E(s)$ transmitancję można pomnożyć przez prawie dowolny wielomian $w(s)$, co zmieni liczbę zmiennych stanu w otrzymanym modelu zmiennych stanu

$$T(s) = T(s)\frac{w(s)}{w(s)}$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki układów dynamicznych

- Charakterystyki czasowe: charakterystyka impulsowa, charakterystyka skokowa
- Charakterystyki częstotliwościowe: charakterystyka amplitudowa, fazowa, amplitudowo-fazowa, charakterystyki logarytmiczne

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki czasowe

Wymuszenie skokiem jednostkowym $1(t)$ – **charakterystyka skokowa**

- Charakterystyką skokową układu dynamicznego nazywać będziemy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego przy zerowych warunkach początkowych modelu
- Charakterystyka skokowa pokazuje jak zachowuje się układ przy ciągłym dostarczaniu mu stałych porcji energii

Wymuszenie impulsem Diraca $\delta(t)$ – **charakterystyka impulsowa**

- Charakterystyką impulsową układu dynamicznego nazywać będziemy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych modelu

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_0^\infty \delta(t)dt = 1, \quad L[\delta(t)] = 1$$

- Charakterystyka impulsowa pokazuje jak zachowuje się układ po dostarczeniu mu jednostkowej porcji energii

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka skokowa

- Charakterystykę skokową modelu w postaci transmitancji operatorowej wyznacza się w następujący sposób:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

- Charakterystykę skokową dla modelu zmiennych stanu wyznacza się poprzez rozwiązanie równania stanu dla wymuszenia skokowego lub sprowadzenie modelu zmiennych stanu do równoważnej mu transmitancji operatorowej i skorzystanie z powyższego wzoru

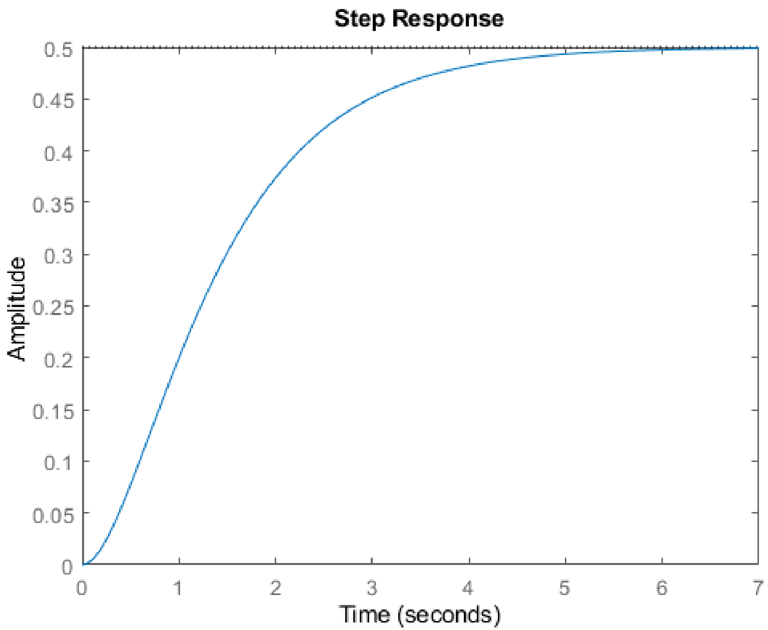
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka skokowa - przykład

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

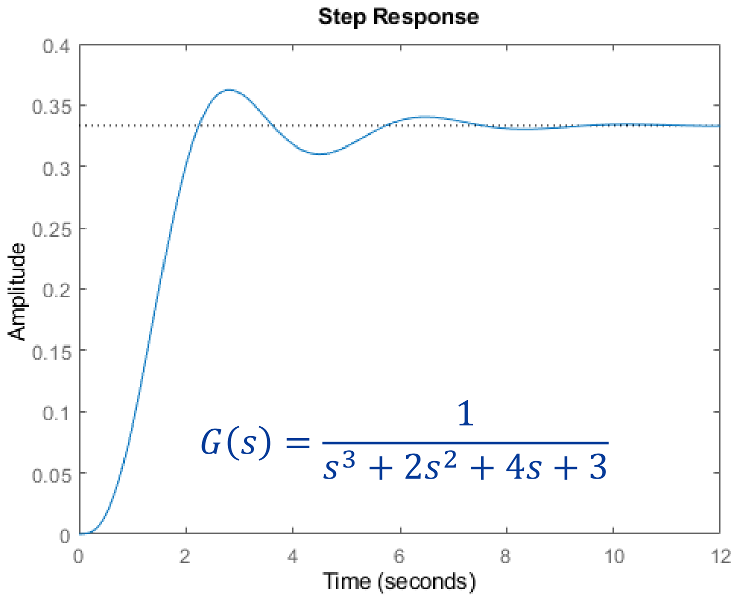
$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}\right] = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$



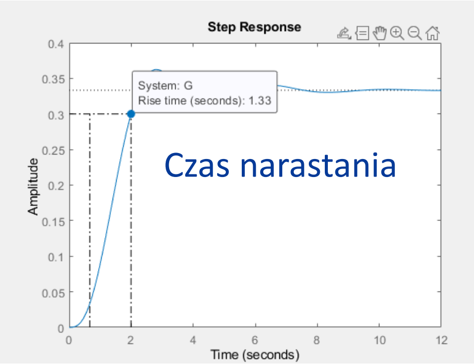
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

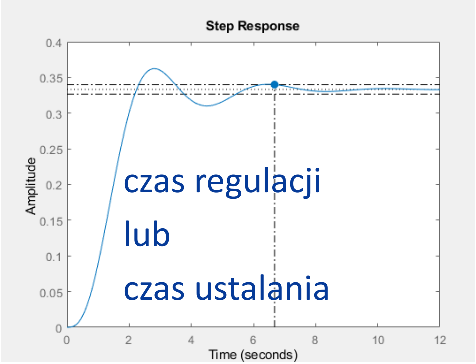
Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

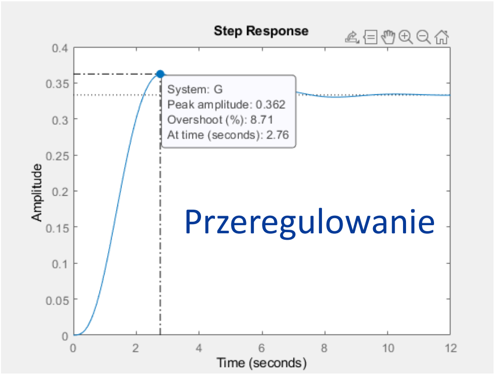
Charakterystyka skokowa – przykład 2



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + 3}$$







UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka impulsowa

- Charakterystykę impulsową modelu w postaci transmitancji operatorowej wyznacza się w następujący sposób:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

- Charakterystykę impulsową dla modelu zmiennych stanu wyznacza się poprzez rozwiązanie równania stanu dla wymuszenia impulsowego lub sprowadzenie modelu zmiennych stanu do równoważnej mu transmitancji operatorowej i skorzystanie z powyższego wzoru

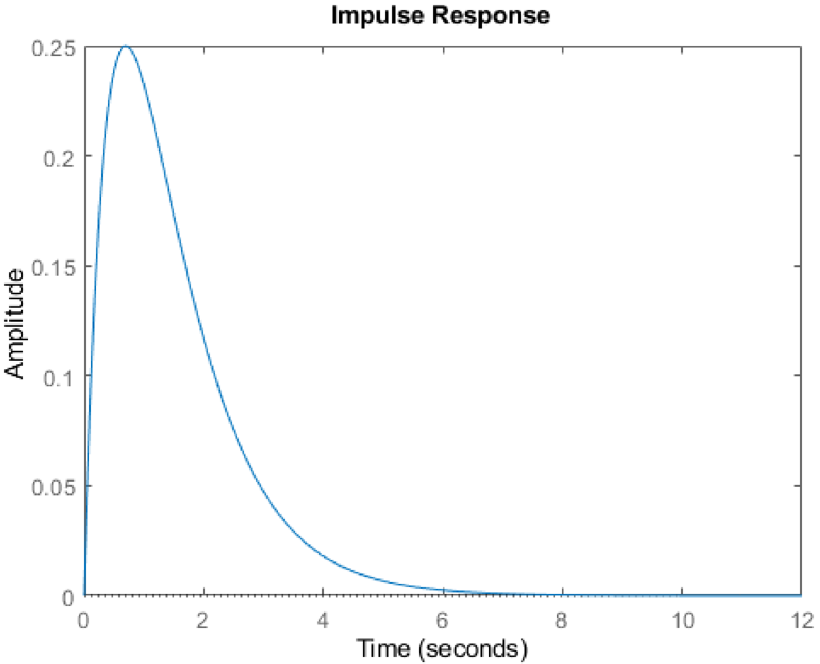
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka impulsowa - przykład

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

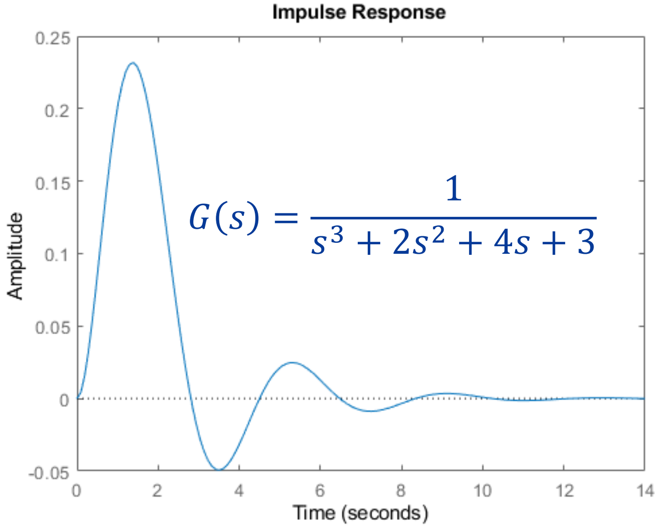
$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$$



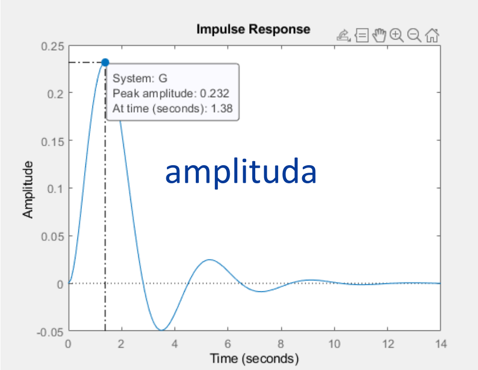
UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

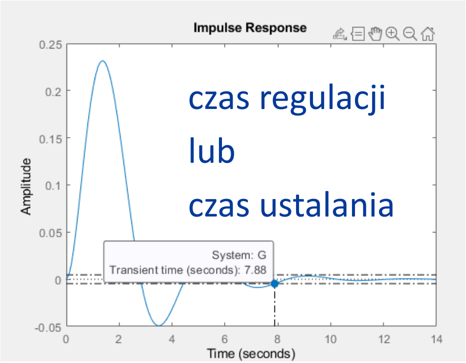
Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka impulsowa – przykład 2



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + 3}$$





UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyka skokowa - przykład

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

Charakterystyka skokowa:

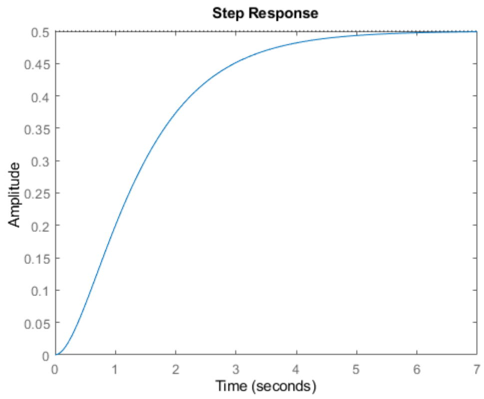
$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+2)(s+1)}\right] = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

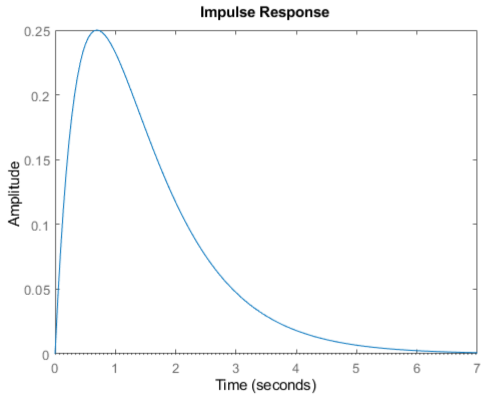
Charakterystyka impulsowa:

$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$$

Zależność:

$$h(t) = \int g(t)dt \qquad g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$$





UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

- Do przeprowadzenia analizy częstotliwościowej obiektu, czyli przeanalizowania sposobu przenoszenia sygnału typu sinusoidalnego o częstotliwości ω przez obiekt należy wyznaczyć transmitancję operatorową układu z wykorzystaniem przekształcenia Fouriera, czyli transmitancję widmową

- W praktyce najczęściej jest tak, ze w momencie kiedy projektant chce wykonać analizę częstotliwościową już jest w posiadaniu transmitancji operatorowej Laplace'a

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

- Do wyznaczenia transformaty operatorowej Fouriera badanego obiektu można wykorzystać prostą zależność występującą między tymi transformatami:

$$s = j\omega$$

Na podstawie transmitancji widmowej można wyznaczyć wszystkie charakterystyki częstotliwościowe badanego obiektu.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Wśród charakterystyk częstotliwościowych wyróżmiamy:

- Charakterystykę amplitudową
- Charakterystykę fazową
- Charakterystykę amplitudowo-fazową

Każda z nich może zostać wykreślona w skali liniowej lub logarytmicznej

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyką amplitudową $F_a(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$ nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω, której wartości określone są następującym wzorem:

$$F_a(\omega) = |T(j\omega)|$$

Moduł liczby zespolonej to rozszerzenie pojęcia wartości bezwzględnej z liczb rzeczywistych na liczby zespolonej.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyką fazową $F_f(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$ nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω, której wartości określone są następującym wzorem:

$$F_f(\omega) = \arg T(j\omega)$$

Argument liczby zespolonej – miara kąta skierowanego między wektorem reprezentującym liczbę zespoloną z na płaszczyźnie zespolonej, a osią rzeczywistą.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyką amplitudowo-fazową $F_{af}(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$ nazywamy funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej ω, której wartości określone są następującym wzorem:

$$F_{af}(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

$$T(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{->} \quad T(j\omega) = \frac{1-j\omega}{\omega^2+1}$$

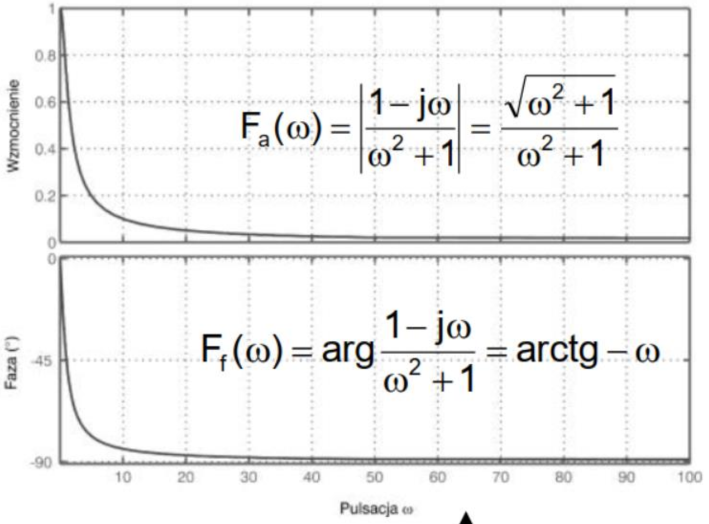
$$F_a(\omega) = \left|\frac{1-j\omega}{\omega^2+1}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+1}$$

$$F_f(\omega) = \arg\frac{1-j\omega}{\omega^2+1} = \mathrm{arctg}(-\omega)$$

$$F_{af}(\omega) = \frac{1-j\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{\omega^2+1} + j\frac{-\omega}{\omega^2+1} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

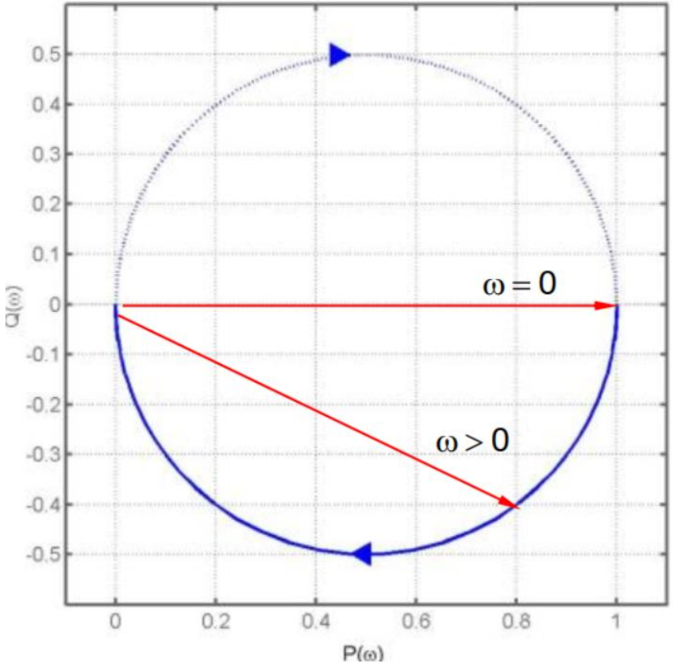
Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe



$\omega \in [0,100]$

$\omega \in [0,\infty) \longrightarrow$



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Decybelem nazywamy jednostkę logarytmiczną, która jest zdefiniowana w następujący sposób:

$$1\ dB = 10 \log_{10} \left| \frac{f(x)}{f_0(x)} \right|$$

Wzmocnieniem logarytmicznym układu nazywamy moduł tansmitancji widmowej wyrażony w dB dla pewnej ustalonej pulsacji.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Oktawą nazywamy jednostkę opisującą przedział zmiennej rzeczywistej $[x_1, x_2]$, którą definiuje się w następujący sposób

$$[x_1, x_2] = 1\text{okt} = \frac{x_2}{x_1} = 2$$

Dekadą nazywamy jednostkę opisującą przedział zmiennej rzeczywistej $[x_1, x_2]$, którą definiuje się w następujący sposób

$$[x_1, x_2] = 1\text{ dek} = \frac{x_2}{x_1} = 10$$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

Charakterystyki częstotliwościowe

Logarytmiczną charakterystyka amplitudową nazywać będziemy wykres wzmocnienia logarytmicznego w funkcji logarytmu dziesiętnego pulsacji.

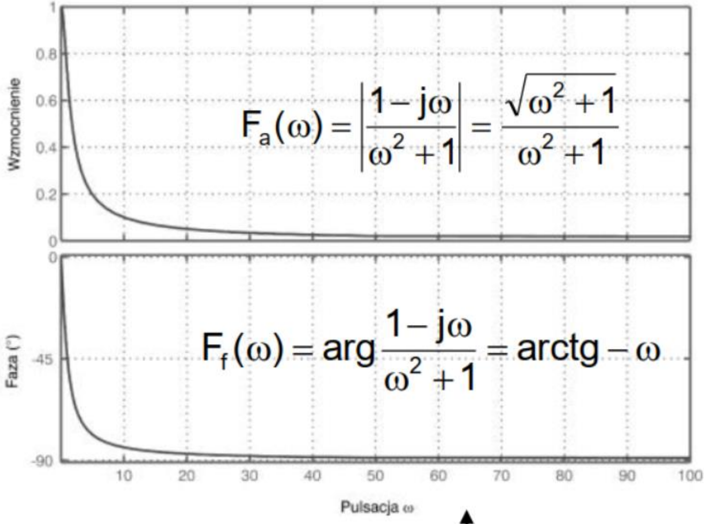
Logarytmiczną charakterystyka fazową nazywać będziemy wykres argumentu transmitancji widmowej w funkcji logarytmu dziesiętnego pulsacji.

Charkterystykami Bode'go nazywać będziemy logarytmiczną charakterystykę amplitudową i logarytmiczną charakterystykę fazową.

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe

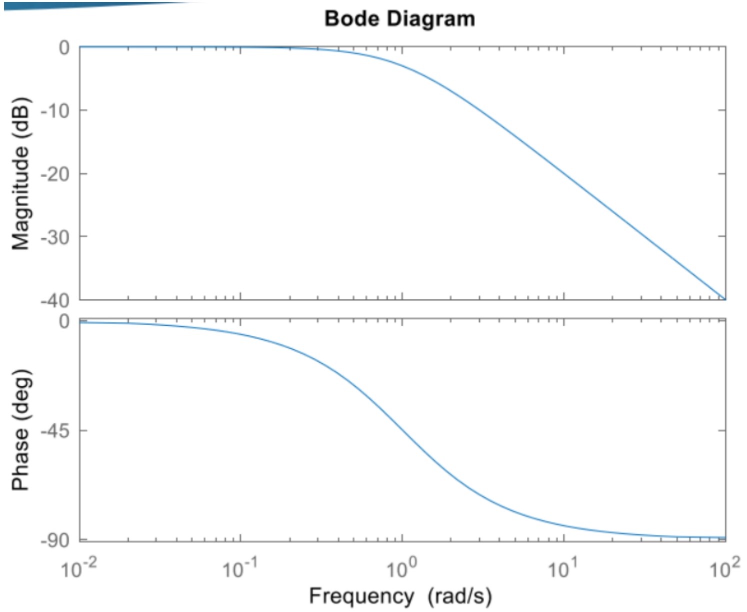
Charakterystyki logarytmiczne - przykład



$$F_a(\omega) = \left|\frac{1-j\omega}{\omega^2+1}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\omega^2+1}$$

$$F_f(\omega) = \arg\frac{1-j\omega}{\omega^2+1} = \mathrm{arctg} - \omega$$

$$\omega \in [0,100]$$



UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

- Własności odnoszące się do stanu układu
- Określają czy stosując odpowiednie wymuszenia (wejścia) i obserwując odpowiedzi (wyjścia) możemy dowolnie kształtować i odczytywać stan układu
- Dla systemów ciągłych: sterowalność i obserwowalność
- Dla systemów dyskretnych wyróżnia się dwa warianty każdej własności: sterowalność – osiągalność i obserwowalność - odtwarzalność

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

Sterowalność

- Sterowalność to własność układu sterowania poleająca na tym, że istnieje sterowanie przeprowadzające układ w pewnym skończonym przedziale czasu do zadanego stanu przy zadanych warunkach początkowych.

- Układ niesterowalny może mieć jeden lub więcej stanów niesterowalnych

- Na stan niesterowalny nie ma wpływu żaden sygnał wejściowy

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

Sterowalność

- **Definicja**:

Układ dynamiczny nazywamy sterowalnym jeżeli dla dowolnego czasu początkowego t_0, dowolnego stanu początkowego $x(t_0) = x_0$ i dowolnego stanu końcowego x_k, istnieje skończony czas $t_k > t_0$ i dowolne sterowanie $u(t)$, takie, że $x(t_k) = x_k$

- **Twierdzenie Kalmana o sterowalności**:

Układ liniowy ciągły o równaniu stanu

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

jest sterowalny wtedy i tylko wtedy gdy macierz sterowalności

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B\,]$$

jest rzędu n, tzn. $rank(S) = n$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

Obserwowalność

- Własność układu sterowania określająca czy na podstawie odczytu sygnału sterującego oraz odczytu sygnału wyjściowego możliwe jest określenie stanu obiektu

- Układ nieobserwowalny posiada jeden lub więcej stanów nieobserwowalnych (niemożliwych do określenia na podstawie sygnałów dostępnych z zewnątrz)

- Jeśli stan nie jest obserwowalny to regulator nigdy nie będzie w stanie określić zachowania takiego stanu i dlatego nie można go wykorzystać do stabilizacji układu

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

Sterowalność

- **Definicja**:

Układ dynamiczny nazywamy obserwowalnym jeżeli dla dowolnego czasu początkowego t_0, dowolnego stanu początkowego $x(t_0) = x_0$ istnieje skończony stan $t_k > t_0$ taki, że znajomość sterowania $u(t)$ i wyjścia $y(t)$ dla $t_0 \leq t \leq t_k$ wystarczą do wyznaczenia x_0

- **Twierdzenie Kalmana o obserwowalności**:

Układ liniowy ciągły o równaniu stanu

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y + Cx$$

jest sterowalny wtedy i tylko wtedy gdy macierz obserwowalności

$$O = [C \;\; CA \;\; CA^2 \;\; \dots \;\; CA^{n-1}\,]^T$$

jest rzędu n, tzn. $rank(O) = n$

UNIWERSYTET MIKOŁAJA KOPERNIKA W TORUNIU
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Sterowalność i obserwowalność

Podział układu

- Dowolny liniowy układ ciągły możemy podzielić na 4 części

Sterowalna i Obserwowalna	**Sterowalna ale nieobserwowalna**
Niesterowalna ale Obserwowalna	**Niesterowalna i obserwowalna**

- Transmitancja opisuje jedynie część sterowalną i obserwowalną